

پیش نیاز برای:	در کتاب درسی:	معادله درجه دوم و سهمی
بیشتر مباحث ریاضیات	ریاضی ۱- فصل ۴- اول و دوم ریاضی ۲- فصل ۱- درس دوم	تعداد تقریبی تست در کنکور: ۱

تهیه و تنظیم: محمدجواد محسنی

Telegram.me/Mkonkooor

حل معادله درجه دو

- معادله ناقص:

اگر b یا c صفر باشند.

$$c = 0 : ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x(ax + b) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{b}{a} \end{cases}$$

$$b = 0 \Rightarrow ax^2 + c = 0 \Rightarrow x^2 = -\frac{c}{a} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{c}{a} > 0 \Rightarrow \text{دو جواب} \\ -\frac{c}{a} < 0 \Rightarrow \text{بی جواب} \end{cases}$$

- معادله کامل:

(۱) استفاده از نکته مجموع ضرایب

نکته: در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$

اگر $a + b + c = 0$ آن گاه ریشه‌ها $\alpha = 1$ و $\beta = \frac{c}{a}$ هستند.

اگر $a + c = b$ آن گاه ریشه‌ها $\alpha = -1$ و $\beta = -\frac{c}{a}$ هستند.

(۲) تجزیه: c ضرب دو عدد و b جمع دو عدد است، اول علامت را تشخیص می‌دهیم و در نهایت با ضرب حدس می‌زنیم و با ضرب چک می‌کنیم. در روش تجزیه ضریب x^2 باید $+1$ باشد.

مثال: جواب‌های $x^2 - 18x + 72 = 0$ را بیابید.

(۳) روش دلتا:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

مثال: مجموع مربعات دو عدد فرد متوالی ۲۹۰ است. این دو عدد را بیابید.

مثال: اختلاف سنی دو برابر با یک دیگر ۴ سال است. اگر چهار سال دیگر حاصل ضرب سن آنها ۶۰ شود، سن هر کدام الان چقدر است؟

مثال: از یک رشته سیم به طول ۵۰ متر می‌خواهیم یک مستطیل به مساحت ۱۴۴ مترمربع بسازیم. طول و عرض این مستطیل را تعیین کنید.

بحث تعداد و علامت ریشه

- تعداد ریشه:

برای تعداد ریشه فقط به علامت Δ توجه می‌کنیم.

$\Delta < 0 \Rightarrow$ صفر ریشه

$\Delta = 0 \Rightarrow$ یک ریشه

$\Delta > 0 \Rightarrow$ دو ریشه

در حالت $\Delta = 0$ می‌گوییم ریشه مضاعف یا مکرر رخ داده است و آن ریشه برابر $\alpha = -\frac{b}{2a}$ است و معادله را می‌توان به صورت $a(x-\alpha)^2 = 0$ نوشت.

نکته: اگر a و c مختلف‌العلامه باشند قطعاً $\Delta > 0$ ولی برای a و c هم‌علامت باید Δ چک شود.

تست: به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، معادله درجه دوم $(2m-1)x^2 + 6x + m - 2 = 0$ دارای دو ریشه حقیقی است؟ (ریاضی ۹۸)

(۴) $-1 < m < 2/5$

(۳) $-1 < m < 3/5$

(۲) $-2 < m < 3/5$

(۱) $-2 < m < 2/5$

تست: به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، معادله درجه دوم $2x^2 + (m+1)x + \frac{1}{4}m + 2 = 0$ فاقد ریشه حقیقی است؟ (تجربی خارج کشور ۸۹)

$$-1 < m < 5 \quad (4)$$

$$-2 < m < 4 \quad (3)$$

$$-3 < m < 4 \quad (2)$$

$$-3 < m < 5 \quad (1)$$

تست: معادله $(x-1)(x^2 - ax + a) = 0$ فقط یک جواب دارد. مجموعه مقادیر a کدام است؟

$$a > 4 \quad (4)$$

$$0 < a < 4 \quad (3)$$

$$0 < a < 2 \quad (2)$$

$$-4 < a < 0 \quad (1)$$

- علامت ریشه‌ها:

ابتدا باید بدانیم که اگر α و β ریشه‌ها باشند:

$$\text{ریشه‌ها جمع} = S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$$

$$\text{ریشه‌ها ضرب} = P = \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

ریشه‌های غیرهم علامت $P < 0 \Rightarrow$

$$P > 0 \Rightarrow \begin{cases} S > 0 \Rightarrow \text{هر دو مثبت} \\ S < 0 \Rightarrow \text{هر دو منفی} \end{cases}$$

⚠️ **حواستان باشد:** در همه حالاتی که از S و P استفاده می‌کنید باید $\Delta > 0$ و در غیر این صورت S و P

اصلاً وجود ندارند که استفاده شوند. پس شرط $\Delta > 0$ را همیشه چک کنید.

نکته: در حالت $P < 0$ استثناً احتیاجی به چک کردن Δ نیست.

مثال: علامت ریشه‌ها را در هر معادله بگویید.

$$1) -4x^2 + 11x + 1 = 0$$

$$2) 3x^2 + 5x + 2 = 0$$

$$۳) 4x^2 + 4x + 1 = 0$$

$$۴) 3x(1-x) = 1$$

تست: به ازای کدام مقدار m معادله $(m-6)x^2 - 2mx - 3 = 0$ دارای دو ریشه حقیقی منفی است؟

(تجربی ۹۷)

$$۳ < m < ۶ \quad (۴)$$

$$۰ < m < ۳ \quad (۳)$$

$$m > ۳ \quad (۲)$$

$$m < -۶ \quad (۱)$$

تست: در معادله $ax^2 + bx + c = 0$ رابطه $9a + 3b + c = 0$ بین ضرایب برقرار است. یکی از ریشه‌ها کدام است؟

$$\frac{2c}{3a} \quad (۴)$$

$$-\frac{b+3a}{a} \quad (۳)$$

$$-۳ \quad (۲)$$

$$\frac{3c}{a} \quad (۱)$$

ساخت P و S

از روابط بین ریشه‌های $ax^2 + bx + c = 0$ فقط جمع و ضرب دو ریشه را داریم و همه روابط خواسته شده را باید به $\alpha + \beta$ و $\alpha\beta$ برسانیم.

مثال: اگر α و β ریشه‌های معادله $4x^2 - 12x + 1 = 0$ باشند، مقادیر زیر را به دست آورید.

$$۱) \alpha^2 + \beta^2$$

$$۲) \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$$

۳) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$

۴) $\alpha^3 + \beta^3$

۵) $|\alpha - \beta|$

۶) $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2$

۷) $\frac{\alpha}{\sqrt{\beta}} + \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}}$

نکته: اگر حاصل عبارت خواسته شده نامتقارن بود از نکته‌ای استفاده می‌کنیم که ریشه‌های معادله در آن صدق می‌کند و سعی می‌کنیم عبارت را متقارن کنیم:

$$\alpha\alpha^2 + b\alpha + c = 0 \Leftrightarrow \alpha$$

تست: اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 4x - 2 = 0$ باشند، حاصل عبارت $\alpha^2 - 5\alpha - \beta$ کدام است؟

۲ (۱) -۲ (۲) -۶ (۳) ۶ (۴)

تست: اگر x_1 و x_2 جواب‌های معادله $x^2 - 5x + 1 = 0$ باشند، حاصل $x_1\sqrt{5x_2 - 1}$ کدام است؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۲۳ (۳) ۲۷ (۴)

تست: به ازای کدام مقدار m ، مجموع جذر هر دو ریشه معادله درجه دوم $2x^2 - (m+1)x + \frac{1}{8} = 0$ برابر با ۲

است؟ (ریاضی ۹۶)

۳ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴)

تست: به ازای کدام مقدار m ، مجموع مربعات ریشه‌های حقیقی معادله $mx^2 - (m+3)x + 5 = 0$ برابر ۶ است؟ (تجربی ۹۳)

- (۱) $-\frac{9}{5}$ (۲) ۱ (۳) ۱ و $-\frac{9}{5}$ (۴) $-\frac{9}{5}$ و -۱

تست: به ازای کدام مقدار m ، ریشه‌های حقیقی معادله $mx^2 + 3x + m^2 = 2$ معکوس یکدیگرند؟ (تجربی خارج کشور ۹۰)

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

ساخت معادله درجه دوم

اگر S و P معادله درجه دومی را بدانیم، می‌توانیم آن معادله را به شکل زیر بسازیم:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

توجه کنید که ضریب x^2 در این معادله +۱ است و اگر می‌خواهید عدد دیگری باشد باید کل معادله بالا را در آن عدد ضرب کنید.

معادله قدیم	معادله جدید
سؤال داده	سؤال خواسته
S و P را داریم	S و P را باید بسازیم

روابط ریشه‌های جدید با قدیم \rightarrow

مثال: معادله‌ای بسازید که ریشه‌هایش ریشه‌های $2x^2 - 3x - 1 = 0$ باشد.

(۱) دو برابر

(۲) معکوس

(۳) قرینه و معکوس

(۴) توان سوم

(۴) یک واحد بیش تر از

تست: ریشه‌های کدام معادله از معکوس ریشه‌های معادله $x^2 - 3x - 1 = 0$ یک واحد کم تر است؟

(تجربی ۹۴)

$$x^2 + 5x + 2 = 0 \quad (۴)$$

$$x^2 - 5x + 2 = 0 \quad (۳)$$

$$x^2 + 3x + 1 = 0 \quad (۲)$$

$$x^2 - 3x + 1 = 0 \quad (۱)$$

نکته: در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$

(۱) اگر b را قرینه کنیم، معادله‌ای حاصل می‌شود که ریشه‌هایش قرینه معادله اول است.

(۲) اگر جای a و c را عوض کنیم، معادله‌ای حاصل می‌شود که ریشه‌هایش معکوس معادله اول است.

(۳) اگر b را در k و c را در k^2 ضرب کنیم، معادله‌ای حاصل می‌شود که ریشه‌هایش k برابر معادله اول است.

تست: اگر α و β ریشه‌های معادله $2x^2 - 3x = 1$ باشند، به ازای کدام مقدار k مجموعه جواب‌های معادله

$8x^2 + kx - 1 = 0$ به صورت $\{\alpha^2\beta, \alpha\beta^2\}$ است؟ (ریاضی خارج کشور ۹۰)

۹ (۴)

۷ (۳)

۶ (۲)

۵ (۱)

تغییر متغیرهای درجه دومی

در سؤالاتی از معادله‌ها اگر یک عبارت را t بگیریم می‌توانیم معادله درجه دوم حل کنیم تا t به دست بیاید. هر موقع در کنکور دیدیم یک عبارت در معادله تکرار می‌شود آن را t می‌گیریم.

تست: معادله $(x^2 - 2x)^2 - (x^2 - 2x) = 2$ چند ریشه حقیقی متمایز دارد؟ (ریاضی ۹۷)

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

تست: قدرمطلق تفاضل حاصل ضرب و حاصل جمع ریشه‌های معادله $7x^2 + 21x - 8 = (x^2 + 3x)^2$ کدام است؟

سه (۴)

دو (۳)

یک (۲)

صفر (۱)

نکته: در معادله دو مجذوری $ax^2 + bx^2 + c = 0$ اگر $x^2 = t$ و بخواهیم ۴ ریشه داشته باشیم، داریم:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$$

اگر دو ریشه بخواهیم شرط $P < 0$ کافی است. در حالت $\Delta = 0$ هم اگر $-\frac{b}{2a}$ مثبت باشد دو ریشه اتفاق می‌افتد.

نکته: در معادله $ax + b\sqrt{x} + c = 0$ اگر $\sqrt{x} = t$ و بخواهیم دو ریشه داشته باشیم، داریم:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$$

اگر یک ریشه بخواهیم شرط $P < 0$ کافی است. در حالت $\Delta = 0$ هم اگر $-\frac{b}{2a}$ مثبت باشد یک ریشه اتفاق می افتد.

مثال: معادله‌های زیر را حل کنید:

۱) $x^4 - 8x^2 + 8 = 0$

۲) $4x^6 + 1 = 5x^3$

۳) $2x - 3\sqrt{x} - 2 = 0$

تست: اگر معادله $x^4 - (m+2)x^2 + m + 5 = 0$ دارای چهار ریشه حقیقی متمایز باشد، مجموعه مقادیر m به

(تجربی ۸۵)

کدام صورت است؟

۴) $4 < m < 9$

۳) $-4 < m < 4$

۲) $m > 4$

۱) $m < -4$

تست: به ازای کدام مقادیر m ، از معادله $mx - 3\sqrt{x} + m - 2 = 0$ فقط یک جواب برای x حاصل می شود؟

(تجربی ۸۸)

۴) $2 < m < 3$

۳) $\frac{3}{2} < m < \frac{5}{2}$

۲) $0 < m < 2$

۱) $-\frac{3}{2} < m < 2$

ویژگی‌های سهمی

نمودار تابع $y = ax^2 + bx + c$ را که یک منحنی متقارن است، سهمی می‌شناسیم.

- دهانه سهمی:

وابسته به علامت a است.



$(a > 0)$



$(a < 0)$

- رأس سهمی:

نقطه‌ای که طول آن $-\frac{b}{2a}$ است.

- ویژگی‌های رأس سهمی:

(۱) کم‌ترین یا بیش‌ترین مقدار (اکسترمم) تابع است. توجه داشته باشید اگر صحبت از ماکسیمم شد یعنی

دهانه سهمی رو به پایین بوده و مینیمم در صورتی به وجود می‌آید که دهانه رو به بالا باشد.

(۲) نمودار سهمی در مجموع یکنوا و یک‌به‌یک نیست. اما قبل و بعد از سهمی این اتفاق می‌افتد.

(۳) خط $x = -\frac{b}{2a}$ محور تقارن سهمی است.

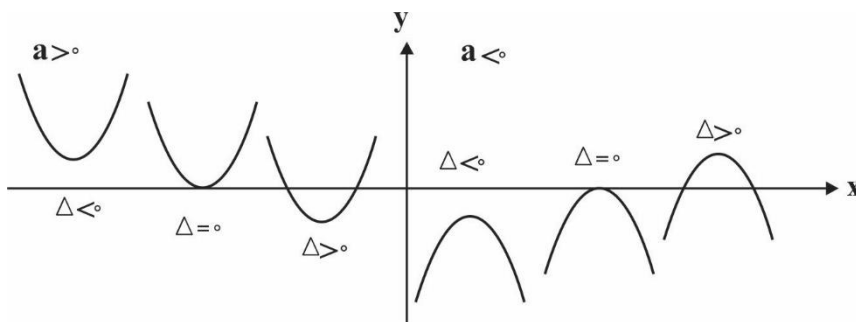
نکته: اگر دو نقطه هم‌عرض از سهمی داشتیم مانند (m, β) و (n, β) ، طول رأس سهمی میانگین طول‌های این دو

نقطه می‌شود، یعنی $\frac{m+n}{2}$.

ریشه‌های سهمی:

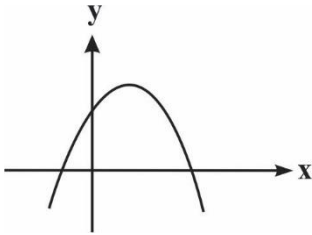
تعداد نقاط تلاقی با محور x ‌ها وابسته به علامت Δ است. با توجه به دهانه و علامت Δ ، شش حالت رخ

می‌دهد:



نکته: همان گونه که از نمودارها مشخص است در حالت $\Delta < 0$ توابع همواره مثبت ($a > 0$) یا همواره منفی ($a < 0$) و در حالت $\Delta = 0$ همواره نامنفی ($a > 0$) یا نامثبت ($a < 0$) هستند. ولی در حالت $\Delta > 0$ تغییر علامت می دهند.

مثال: علامت های a ، b و c را در سهمی مقابل بیابید.



تست: اگر یکی از منحنی های $y = (a-1)x^2 + x + 3$ نسبت به خط $x=2$ متقارن باشد، این منحنی محور x ها را با کدام طول مثبت قطع می کند؟

- (1) 2 (2) 3 (3) 4 (4) 6

تست: اگر بیشترین مقدار تابع با ضابطه $f(x) = (k+3)x^2 - 4x + k$ برابر صفر باشد، مقدار k کدام است؟

- (1) -4 (2) -1 (3) 1 (4) 4

تست: به ازای کدام مجموعه مقادیر a هر نقطه از نمودار $f(x) = (a-1)x^2 + 2\sqrt{2}x + a$ بالای محور x هاست؟

(ریاضی خارج کشور ۸۹)

- (1) $a < -1$ (2) $a > 1$ (3) $a > 2$ (4) $1 < a < 2$

تست: به ازای کدام مجموعه مقادیر m سهمی به معادله $y = (1-m)x^2 + 2(m-3)x - 1$ همواره پایین محور x هاست؟

(ریاضی خارج کشور ۹۸)

- (1) $1 < m < 5$ (2) $2 < m < 5$ (3) $2 < m < 4$ (4) $2 < m < 6$

تست: به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، کمترین مقدار تابع $f(x) = mx^2 + 2(x+m) - 1$ در ربع سوم قرار دارد؟

$$m > 0 \quad (4)$$

$$0 < m < 1 \quad (3)$$

$$-\frac{1}{2} < m < 1 \quad (2)$$

$$-1 < m < \frac{1}{2} \quad (1)$$

ارتباط سهمی و ضابطه

- رسم سهمی از روی ضابطه

- (۱) رأس سهمی را روی دستگاه مختصات نمایش دهید.
- (۲) عرض از مبدا را مشخص کنید و از رأس به آن نقطه و به شکل منحنی وصل کنید.
- (۳) سمت دیگر سهمی را از تقارن رسم کنید.

مثال: توابع زیر را رسم کنید.

$$1) f(x) = -x^2 + 2x - 3$$

$$2) f(x) = 2x^2 - 6x$$

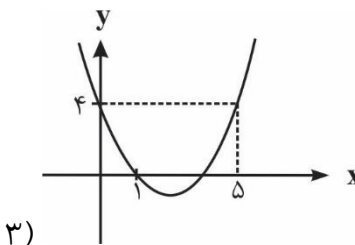
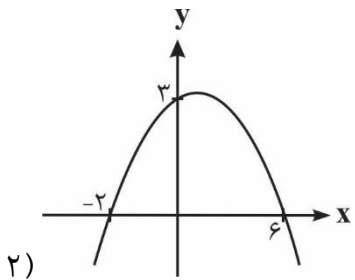
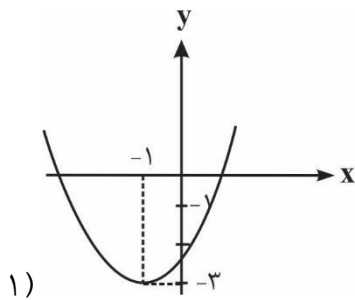
نوشتن ضابطه از روی نمودار

- (۱) اگر ریشه‌های سهمی را به شکل $x = \alpha$ و $x = \beta$ داشتیم ضابطه سهمی به شکل $f(x) = a(x - \alpha)(x - \beta)$ است. می‌دانیم در حالت ریشه مضاعف معادله به شکل $f(x) = a(x - \alpha)^2$ می‌شود.
- (۲) اگر رأس سهمی را به شکل (α, β) داشتیم، ضابطه سهمی به شکل $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ است. این ضابطه از انتقال افقی و عمودی به دست آمده.

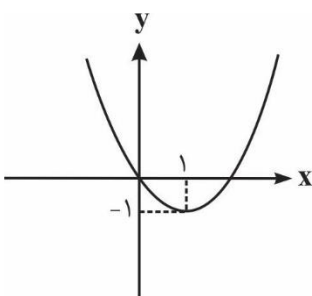
⚠ حواستان باشد: در دو ضابطه بالا، a یک عدد مجهول است (همان ضریب x^2) که باید از طریق دیگری به دست آوریم که معمولاً در مسئله یک نقطه از نمودار (خصوصاً عرض از مبدا) را می‌دهند و باید جای‌گذاری کنیم.

(۳) اگر از سهمی اطلاعات پراکنده‌ای داشتیم از ضابطه کلی $f(x) = ax^2 + bx + c$ استفاده می‌کنیم.

مثال: ضابطه هر سهمی را بنویسید.



تست: نمودار $y = ax^2 + bx + c$ مطابق شکل زیر است؛ مقدار b کدام است؟



-۲ (۱)

-۱ (۲)

۴ (۳)

۱ (۴)

عبور سهمی از نواحی مختصات

تمامی این سؤالات با دهانه سهمی و شرایط ریشه‌ها (P, S, Δ) حل می‌شوند.

(۱) عبور از دو ناحیه: در این حالت باید $\Delta < 0$ و اگر $a > 0$ از ربع‌های اول و دوم عبور می‌کند و اگر $a < 0$ از ربع‌های سوم و چهارم عبور می‌کند.

(۲) عبور از سه ناحیه: در این حالت باید $\Delta > 0$ و $P > 0$ ، با توجه به دهانه (علامت a) و جمع دو ریشه (S) ربعی که نمی‌خواهیم مشخص می‌شود.

(۳) عبور از چهار ناحیه: کافی است $P < 0$

تست: به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، منحنی به معادله $y = (m+2)x^2 + 3x + 1 - m$ محور x ها را در هر دو طرف مبدأ مختصات قطع می‌کند؟

(ریاضی خارج کشور ۹۵)

(۴) فقط $m > 1$

(۳) فقط $m < -2$

(۲) $-2 < m < 1$

(۱) $m > 1$ یا $m < -2$

تست: نمودار تابع $f(x) = x^2 - (m-3)x + 2m$ فقط از ناحیه چهارم محور مختصات نمی‌گذرد. m در کدام بازه زیر قرار می‌گیرد؟

(۴) $2 \leq m < 3$

(۳) $-1 \leq m < 0$

(۲) $0 \leq m < \frac{1}{2}$

(۱) $1 \leq m < 4$

تست: نمودار تابع $y = x^2 - 3x - 10$ را حداقل چند واحد به طرف x های مثبت انتقال دهیم، تا طول نقاط تلاقی نمودار حاصل با محور x ها غیرمنفی باشد؟

(تجربی خارج کشور ۹۳)

(۴) ۳

(۳) ۲

(۲) $1/5$

(۱) ۱